جامعة البعث	مقرر تمثيلات الزمر والجبور	المدة: ساعتان
كلية العلوم	السنة الرابعة رياضيات (جبر)	الدرجة: ١٠٠
قسم الرياضيات	الفصل الأول للعام ٢٠١٧ - ٢٠١٨	اسم الطالب:

السؤال الأول: لتكن G زمرة، والمطلوب:

١ - أثبت أنه أياً كان $g \in G$ فإن العلاقة $T_g : G \to G$ المعرفة بالشكل الآتي: أياً كان $x \in G$، فإن $T_g(x) = x$، هي تطبيق متباين وغامر.

٢ - أثبت أن المجموعة $\overline{G} = \{T_g : \forall g \in G\}$ هي زمرة بالنسبة لعملية تركيب التطبيقات.

٣ - أثبت أن $G \cong \overline{G}$.

٤ - إذا كانت الزمرة G منتهية، أثبت أن G تملك تمثيلاً.

السؤال الثاني: لتكن G زمرة و S مجموعة غير خالية و F حقلاً. والمطلوب:

١ - أثبت أن كل تأثير للزمرة G يعرف تمثيلاً للزمرة G من خلال زمرة التباديل للمجموعة S.

٢ - لنفرض أن الزمرة G منتهية مرتبتها n، ولنفرض أن $F(G) = \{f : G \to F$ تطبيق $\}$ الفضاء المتجهي فوق F ذو البعد n. أثبت أن العلاقة $\rho_L : G \to GL_F(F(G))$ المعرفة بالشكل الآتي: $\rho_L(g)(f)(x) = f(g^{-1}x)$ أياً كان $g \in G, f \in F(G), x \in G$، هي تمثيل للزمرة G.

السؤال الثالث:

١ - ليكن $\rho : G \to GL_F(V)$ تمثيلاً للزمرة G، عرف الـ G-تطبيق ثم أثبت أنه إذا كان $f, g \in End_F(V)$ كل منهما هو G-تطبيق فإن $f + g$ هو أيضاً G-تطبيق.

٢ - ليكن $\rho : G \to GL_F(V)$ و $\rho' : G \to GL_F(V')$ تمثيلين أوليين للزمرة G فوق F بعد كل منهما أكبر أو يساوي الواحد، و $T : V \to V'$ هو G-تطبيق، أثبت أنه إما $T = 0$ أو أن T تماثل.

السؤال الرابع:

ليكن V فضاءً متجهياً فوق الحقل F بعده n وقاعدته المجموعة $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$. أثبت أنه لأجل كل $1 \leq j \leq n$ فإن العلاقة $e_j^* : V \to F$ المعرفة بالشكل الآتي:

$$e_j^*(e_i) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

هي تطبيق خطي، ثم أثبت أن المجموعة $\{e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*\} \subset V^*$ تشكل قاعدة للفضاء V^* فوق F.

حمص في ٤ / ٢ / ٢٠١٨ م.

انتهت الأسئلة

د. حمزة حاكمي

سلم التصحيح مقرر تمثيلات
الزمر [illegible]
السنة الرابعة رياضيات
د/ خبية
الفصل الأول ٢٠١٧-٢٠١٨

السؤال الأول: (٣+٥+٣+١٠ = ٢١ درجة)

١- إن T_g تطبيق لأنه إذا كان $x,y \in G$ بحيث $x=y$ فإن $gx=gy$ وهذا يعني أن $T_g(x)=T_g(y)$، وهو أيضاً متباين لأنه إذا كان $T_g(x)=T_g(y)$ فإن $gx=gy$ وبالتالي $x=y$، كذلك إن T_g غامر لأنه إذا كان $z \in G$ فإن $g^{-1}z \in G$ ومنه فإن

$$T_g(g^{-1}z)=g(g^{-1}z)=(gg^{-1})z=z$$

٢- إن المجموعة $\bar{G}$ غير خالية لأن $e \in G$ وإذا كان $x \in G$ فإن $T_e(x)=ex=x=I_G(x)$ ومنه $T_e=I_G \in \bar{G}$ ،

كما أن عملية تركيب التطبيقات على المجموعة $\bar{G}$ داخلية لأنه إذا كان $T_g, T_h \in \bar{G}$ حيث $g,h \in G$ فإن $T_g \cdot T_h = T_{gh}$ لأنه إذا كان $x \in G$ فإن

$$T_{gh}(x)=(gh)x=g(hx)=T_g(hx)=T_g(T_h(x))=T_g \cdot T_h(x)$$

ومنه $T_{gh}=T_g T_h$ وأن T_e هو العنصر المحايد في $\bar{G}$ وعملية تركيب التطبيقات تجميعية، وأن نظير كل عنصر T_g هو $T_g^{-1}=T_{g^{-1}}$ ، لأنه إذا كان $x \in G$ فإن

$$T_g T_g^{-1}(x)=T_e(x)=x,\quad g\,T_g^{-1}(x)=x$$

وهذا يعني أن

$$T_g^{-1}(x)=g^{-1}x=T_{g^{-1}}(x) \Rightarrow T_g^{-1}=T_{g^{-1}}$$

ومنه فإن المجموعة $\bar{G}$ زمرة.

٣- لنعرف العلاقة $\varphi : G \to \bar{G}$ بالشكل الآتي: إذا كان $g \in G$ فإن $\varphi(g)=T_g$ نجد أن φ تطبيق لأنه إذا كان $g_1,g_2 \in G$ بحيث $g_1=g_2$ فإنه إذا كان $x \in G$ فإن $g_1x=g_2x$ ومنه $T_{g_1}(x)=T_{g_2}(x)$ وبالتالي يكون $T_{g_1}=T_{g_2}$ أي $\varphi(g_1)=\varphi(g_2)$ ، وأن φ تشاكل لأنه إذا كان $x,y \in G$ فإن

$$\varphi(x \cdot y)=T_{x \cdot y}=T_x \cdot T_y=\varphi(x)\cdot\varphi(y)$$

كما أن φ متباين لأنه إذا كان $\varphi(g_1)=\varphi(g_2)$ فإن $T_{g_1}=T_{g_2}$ ومنه إذا كان $x \in G$ فإن $T_{g_1}(x)=T_{g_2}(x)$ وبالتالي $g_1x=g_2x$ ومنه يكون $g_1=g_2$.

وكذلك φ غامر لأنه إذا كان $T_a \in \bar{G}$ فإن $a \in G$ وأن $\varphi(a)=T_a$ ،

مما سبق نجد أن $G \cong \bar{G}$

٤- لنفرض أن الزمرة G منتهية مرتبتها n وأن S_n زمرة التباديل للزمرة G عندئذ فإن $G \cong \bar{G} \subseteq S_n$ ومنه يوجد تشاكل زمري $T : G \to S_n$ المعرف بـ $T(g)=T_g$ وذلك لأجل كل $g \in G$ ولتكن الزمرة S_n تملك تمثيل $f : S_n \to GL_F(V)$ لنضع $\rho = f \cdot T : G \to GL_F(V)$ نجد أن ρ تشاكل زمري وبالتالي فهو تمثيل للزمرة G معرف بالشكل $\rho(g)=fT(g)=f(T_g)$ ،

السؤال الثاني: (١٠+١٥ = ٢٥ درجة)

١- لنفرض أن $A(S)$ زمرة التباديل للمجموعة S ولنفرض أن $* : G \times S \to S$ تأثير الزمرة G على المجموعة S ، لنعرف العلاقة $T : G \to A(S)$ بالشكل الآتي: إذا كان $g \in G$ لنضع $T(g)=T_g$ إن T_g هو تبديل للمجموعة S . إن T تطبيق لأنه إذا كان $g_1,g_2 \in G$ بحيث $g_1=g_2$ ، عندئذ فإن $g_1 * s = g_2 * s$ ومنه $T_{g_1}(s)=T_{g_2}(s)$ وبالتالي يكون $T_{g_1}=T_{g_2}$ أي إن $T(g_1)=T(g_2)$ ،

كما أن T تشاكل زمري لأن $T(g_1 \cdot g_2)=T_{g_1} \cdot T_{g_2}$ ، وإذا كان $s \in S$ فإن

$$T_{g_1 g_2}(s)=(g_1 g_2)*s=g_1*(g_2*s)=T_{g_1}(g_2*s)$$
$$=T_{g_1}(T_{g_2}(s))=T_{g_1}\cdot T_{g_2}(s) \Rightarrow T_{g_1 \cdot g_2}=T_{g_1}\cdot T_{g_2}$$

بالتالي يكون $T(g_1 \cdot g_2) = T(g_1) \cdot T(g_2)$ ، أي أن T هو تشاكل زمري
بالتالي فإن T هو تمثيل للزمرة G .

٢ـ إن $\rho_L : G \longrightarrow GL_F(F(G))$ معرف بالشكل $\rho_L(g)(f)(x) = f(g^{-1}x)$
وذلك أيا كان $g \in G$ و $f \in F(G)$ و $x \in G$ ، إن ρ_L تطبيق لأنه أيا كان
$g_1, g_2 \in G$ بحيث $g_1 = g_2$ فإن $g_1^{-1} = g_2^{-1}$ ومنه أيا كان $x \in G$ فإن
$g_1^{-1}x = g_2^{-1}x$ وبالتالي أيا كان $f \in F(G)$ فإن $f(g_1^{-1}x) = f(g_2^{-1}x)$ ومنه
فإن $\rho_L(g_1)(f)(x) = \rho_L(g_2)(f)(x)$ $f \in F(G)$
وذلك أيا كان $x \in G$ ومنه فإن $\rho_L(g_1)(f) = \rho_L(g_2)(f)$ وذلك أيا كان
ومنه $\rho_L(g_1) = \rho_L(g_2)$ ، أي أن ρ_L تشاكل لأنه إذا كان $g_1, g_2 \in G$
فإن $g_1 \cdot g_2 \in G$ وأيا كان $(g_1 \cdot g_2)^{-1} \in G$ وأيا كان $x \in G$ فإن $(g_1 \cdot g_2)^{-1}$
$(g_1 \cdot g_2)^{-1}x = (g_2^{-1} \cdot g_1^{-1})x = g_2^{-1}(g_1^{-1}x)$
وأيا كان $f \in F(G)$ فإن $f((g_1 \cdot g_2)^{-1}x) = f(g_2^{-1}(g_1^{-1} \cdot x))$
ومنه فإن
$$\rho_L(g_1 \cdot g_2)(f)(x) = f((g_1 \cdot g_2)^{-1} \cdot x) =$$
$$= f(g_2^{-1} \cdot (g_1^{-1}x)) = \rho_L(g_2)(f)(g_1^{-1}x) =$$
$$= \rho_L(g_1)(\rho_L(g_2)(f)(x)) = \rho_L(g_1)\,\rho(g_2)(f)(x)$$
وذلك أيا كان $f \in F(G)$ ومنه فإن $\rho_L(g_1 \cdot g_2) = \rho_L(g_1) \cdot \rho_L(g_2)$ وهذا يعني أن
ρ_L هو تمثيل للزمرة G . د/ ٥ مجـ = ١٢ + ١٣

السؤال الثالث

١ـ ليكن $\rho : G \longrightarrow GL_F(V)$ تمثيلاً للزمرة G ولنفرض أن $T : V \longrightarrow V$ مؤثراً خطياً
للفضاء V ، نقول إن T هو G - تطبيق إذا تحقق $\rho(g) \cdot T = T \cdot \rho(g)$
وذلك أيا كان $g \in G$
لنفرض أن $f, T \in End_F(V)$ كل منهما هو G - تطبيق ، عندئذٍ أيا كان $g \in G$
فإن $\rho(g)(T+f) \in End_F(V)$ وأيا كان $v \in V$ فإن
$$\rho(g)(T+f)(v) = \rho(g)((T+f)(v)) = \rho(g)(T(v)+f(v)) =$$
$$= \rho(g)(T(v)) + \rho(g)(f(v)) = (\rho(g) \cdot T)(v) + (\rho(g) \cdot f)(v)$$ د/ ٢
$$= (T\rho(g))(v) + (f\rho(g))(v) = T(\rho(g)(v)) + f(\rho(g)(v))$$
$$= (T+f)(\rho(g)(v)) = (T+f) \cdot \rho(g)(v)$$
ومنه فإن $\rho(g)(T+f) = (T+f)\rho(g)$ أي أن $T+f$ هو G - تطبيق ،

٢ـ إن $Ker(T)$ فضاء جزئي من V ، وهو G - مستقر لأنه إذا كان $v \in Ker(T)$
فإن $(T\rho(g))(v) = T(\rho(g)(v)) = \rho(g)(T(v)) = \rho(g)(0) = 0$
ومنه فإن $\rho(g)(Ker(T)) \subseteq Ker(T)$ ولكن التمثيل هو أولي
إما $Ker(T) = 0$ أو أن $Ker(T) = V$ ، إذا كان $Ker(T) = V$ عندئذٍ فإنه $= 0$ د/ ٢
لنفرض أن $T \neq 0$ عندئذٍ $Ker(T) \neq V$ ومنه $Ker(T) = 0$ أي أن T متباين ،
من جهة أخرى ، إن $Im(T)$ هو فضاء جزئي من V' وهو G - مستقر لأنه أيا كان
$v \in Im(T)$ يوجد $w \in V$ بحيث $v = T(w)$ ومنه أيا كان $g \in G$ فإن
$$\rho'(g)(v) = \rho'(g)(T(w)) = T(\rho'(g)(w)) \in Im(T)$$
وبما أن التمثيل أولي نجد أنه إما $Im(T) = 0$ أو $Im(T) = V'$ ، لكن $f \neq 0$
فإن $Im(T) \neq 0$ ومنه فإن $Im(T) = V'$ أي أن T غامر ومنه نجد أن T تقابل
مجـ = ١٥ + ١٠ د/ ٥

السؤال الرابع

لنعرف العلاقة $e_j^* : V \longrightarrow F$ بالشكل الآتي أيا كان $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \in V$
فإن $e_j^*(x) = \alpha_j$ سنجد أن e_j^* تطبيق لأنه إذا كان $x, y \in V$
فإن $x = \sum \alpha_i e_i$ ، $y = \sum \beta_i e_i$ ، $\alpha_i, \beta_i \in F$
و $x = \sum \alpha_i e_i$ إذا كان ، $e_j^*(y) = \beta_j$ $e_j^*(x) = \alpha_j$ د/ ١
عندئذٍ فإن $x = y$
$\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \beta_i)e_i = 0$ ومنه فإن $\alpha_j = \beta_j$ وبالتالي فإن

$e_j^*(x)=\alpha_j$, $\beta_j = e_j^*(y)$.

وإن $e_j^*(x+y) = e_j^*\left(\sum(\alpha_i+\beta_i)e_i\right) = \alpha_j+\beta_j = e_j^*(x)+e_j^*(y)$

$\forall \lambda\in F$, $e_j^*(\lambda x) = e_j^*\left(\sum(\lambda\alpha_i)e_i\right) = \lambda\alpha_j = \lambda e_j^*(x)$

وهكذا نجد أن e_j^* هي تطبيق خطي كما هو مطلوب.

المجموعة $\{e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*\}$ تولد الفضاء V^* فوق F لإثبات ذلك لتكن $f\in V^*$

بأن $f: V \to F$ تطبيق خطي وأن α_i أياً كان $x=\sum\alpha_i e_i\in V$ فإن

$f(x)=f\left(\sum\alpha_i e_i\right)=\sum f(\alpha_i e_i)=\sum\alpha_i f(e_i) =$

$= \sum\beta_i\alpha_i$

حيث $\beta_i \in f(e_i)$ وأن $\alpha_i = e_i^*(x)$

ومنه نجد أن

$f(x)=\sum\beta_i e_i^*(x) = \sum(\beta_i e_i^*)(x)$

$= \left(\sum\beta_i e_i^*\right)(x) \quad \forall x\in V$

٥ / د أي أن $f=\sum\beta_i e_i^*$ أي أن المجموعة تولد الفضاء V^* فوق F.

لنبرهن على أن المجموعة مستقلة خطياً فوق F.

لنفرض أن $\sum\beta_i e_i^* = 0$ حيث $\beta_i\in F$ عندئذٍ نجد أن

$0 = \left(\sum_{i=1}\beta_i e_i^*\right)(e_1) = \sum(\beta_i e_i^*)(e_1) = \sum\beta_i e_i^*(e_1) = \beta_1$

وبهذا الشكل نجد أن $\sum\beta_i e_i^*(e_j) = \beta_j = 0$ وذلك من أجل $\forall j \le n$

ومنه نجد أن $\beta_1=\beta_2=\dots=\beta_n=0$ ومنه نجد أن المجموعة $\{e_i^*\}$ مستقلة خطياً فوق F وبالتالي فهي تشكل قاعدة للفضاء V^*.